

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (Cours et TD)

Table des matières

1	Taux d'intérêt	3
1.1	Différentes définitions	3
1.2	Absence d'arbitrage et modélisation des taux	6
2	Le modèle de Vasicek (1977)	8
2.1	Analyse du modèle	8
2.2	Prix des zéros-coupons	9
2.3	La courbe des taux issue du modèle de Vasicek	10
3	Modèles de déformation de la courbe des taux	11
3.1	Équation structurelle des taux	12
3.2	Quelques propriétés probabilistes	14
3.3	Exemple : modèle de Hull et White 1 facteur '90	15
3.4	Call dans un modèle de HW 1 facteur	16
4	Quelques produits de taux d'intérêt	18
4.1	Caps, floors et collars	18
4.2	Swap	21

1 Taux d'intérêt



Point de vue dans un marché sans risque de crédit/contre-partie.

1.1 Différentes définitions

- **Zéro-coupon** d'échéance T : $B(t, T)$ = prix en t de 1 € payé en T
- **Taux continu** $R(t, \theta)$ de maturité θ défini par

$$B(t, t + \theta) = \exp(-\theta R(t, \theta)), \quad R(t, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln(B(t, t + \theta)).$$

- **Courbe des taux** : fonction $[\theta \rightarrow R(t, \theta)]$ qui donne les différents taux de la date t en fonction de leur maturité θ . Courbe plate si taux constant.
- **Taux linéaire** $L(t, \theta)$ (utilisé pour $\theta \leq 1$ an) : $B(t, t + \theta) = \frac{1}{(1 + \theta L(t, \theta))}$.
- **Taux court** r_t : $r_t = \lim_{\theta \downarrow 0} R(t, \theta) \rightsquigarrow$

$$r_t = -\partial_T(\ln B(t, T))_{T=t}.$$

Attention : $(B(t, T))_t$ stochastique, non différentiability par rapport à t .

- **Zéro-coupon forward** $B_t(T, T + \theta)$ = valeur fixée en t pour le montant à payer en T pour garantir 1 € en $T + \theta$:

$$B_t(T, T + \theta) = \frac{B(t, T + \theta)}{B(t, T)}.$$

- **Taux forward continu** $R_t(T, \theta)$ (ou taux à terme) fixé en t commençant en T et de maturité θ :

$$B_t(T, T + \theta) = \exp(-\theta R_t(T, \theta)).$$

- **Taux court forward** $f(t, T)$ (ou à terme), fixé en t commençant en T :

$$f(t, T) = \lim_{\theta \downarrow 0} R_t(T, \theta) = -\partial_T \ln B(t, T).$$

- **Lien avec le taux court** (non-forward) :

$$r_t = -\partial_T (\ln B(t, T))_{T=t} = f(t, t).$$

Propriété. Tout s'exprime avec le taux court forward :

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s)ds\right), \quad R(t, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} f(t, s)ds,$$

$$B_t(T, T + \theta) = \exp\left(-\int_T^{T+\theta} f(t, s)ds\right), \quad R_t(T, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_T^{T+\theta} f(t, s)ds.$$

▮ Il suffit de décrire la déformation des taux court forward pour comprendre la déformation de la courbe de taux, des prix de produit de taux, ...

▮ Point de vue Heath-Jarrow-Morton '92.

1.2 Absence d'arbitrage et modélisation des taux

Propriétés.

- Si taux d'intérêt déterministes, par AOA

$$B(t, T) = \frac{S_t^0}{S_T^0} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right).$$

- Si taux d'intérêt aléatoires (dans un marché avec aléas browniens historiques $\widehat{W}$), il existe des vecteurs (lignes) de volatilité $(\Gamma(t, T))_t$ (éventuellement aléatoire)

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T)(d\widehat{W}_t + \lambda_t dt), \quad B(T, T) = 1.$$

Proposition. Par AOA, il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, équivalente à $\mathbb{P}$ telle que le prix des zéro-coupon vérifie

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) | \mathcal{F}_t \right]$$

(rappel : $B(T, T) = 1$).

► **A ce point, deux approches :**

1. modéliser le taux court $(r_t)_t$, puis déduire le prix de $B(0, T)$ pour chaque T (soit la courbe des taux aujourd'hui) : **[Merton '71, Vasicek '77, Dothan '78, Brennan-Schwarz '80, Cox-Ingersoll-Ross '85, Pearson-Sun '94]**
2. prendre la courbe des taux aujourd'hui comme données de marché et chercher à modéliser la déformation de celle-ci au cours du temps (quelle structure des taux...) : **[Heath-Jarrow-Morton '92...]**

2 Le modèle de Vasicek (1977)

Structure très simple, avec un seul facteur $(\hat{W}_t)_t$.

Sous l'univers risque-neutre, on pose $\boxed{dr_t = a(b - r_t)dt - \sigma dW_t, \quad r_0 = r.}$

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui oscille autour d'une tendance centrale b , avec une force de rappel d'intensité a .

Le signe - devant σ : convention d'écriture justifiée par la dynamique des 0-cp.

2.1 Analyse du modèle

Proposition. La solution r_t est un processus gaussien donné par

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s.$$

L'intégrale $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$ est gaussienne

i) de moyenne (conditionnellement à r_t)

$$m(T - t) = b(T - t) + (r_t - b) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a},$$

ii) et de variance $\Sigma^2(T - t) = -\frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right).$

Propriétés se généralisant facilement au cas de processus d'Ornstein-Uhlenbeck non stationnaires, vérifiant

$$dr_t = a_t(b_t - r_t)dt - \sigma_t dW_t, \quad r_0 = r,$$

avec coefficients déterministes du temps.

2.2 Prix des zéros-coupons

$\int_t^T r_s ds | r_t$ gaussienne $\Rightarrow$ prix des 0-coupons explicite (de même courbe des taux).

Théorème. Dans le modèle de Vasicek, le prix d'un zéro-coupon d'échéance T est donné par :

$$B(t, T) = \exp - \left[R_\infty(T - t) - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right]$$

avec $R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$. Sa volatilité vaut $\Gamma_V^a(t, T) = \sigma \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$.

2.3 La courbe des taux issue du modèle de Vasicek

La courbe des taux de la date t est donnée par :

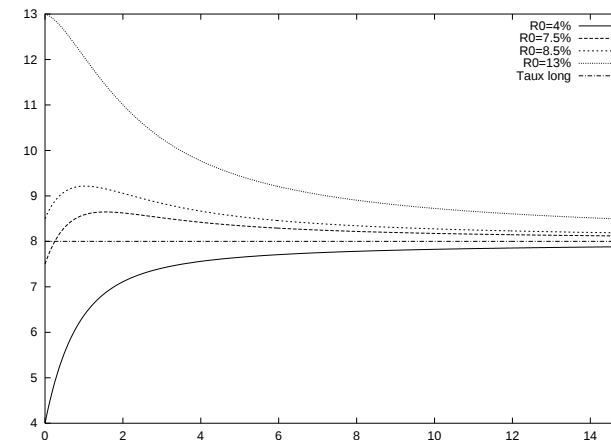
$$R(t, \theta) = R_\infty - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta} + \frac{\sigma^2}{4a^3\theta} (1 - e^{-a\theta})^2, \quad R(t, +\infty) = R_\infty \quad \forall t.$$



Déformation de la courbe des taux par translation parallèle uniquement.

Courbe des taux $\theta \rightarrow R(t, \theta)$ ressemblante à de nombreuses courbes de taux observées sur le marché.

Mais pas de courbes dites *inversées*, où le taux court r est plus haut que le taux long R_∞ (courbe avec un creux).



Principale critique : modèle ne prend pas la courbe des taux comme donnée (mais l'obtient comme conséquence d'un modèle de taux court).

3 Modèles de déformation de la courbe des taux

Objectif : modéliser les taux d'intérêt en prenant comme paramètres en entrée pas seulement le taux court, mais toute la courbe des taux aujourd'hui

▀ Evolution en dimension infinie :

- Modèle discret : Ho et Lee (1985).
- Modèle continu : Heath, Jarrow & Morton (1987-1992).

Dynamique des prix des zéro-coupon :

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) dW_t, \quad B(T, T) = 1$$

avec

- W un $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien (composantes indépendantes $\neq$ ACP)
- $\Gamma(t, T)$ famille de volatilités locales (éventuellement aléatoires)
- $\Gamma(T, T) = 0$ et $\partial_T \Gamma(t, T) = \gamma(t, T)$

Covariance entre les rendements des différents zéro-coupons :

$$\text{Cov}_t\left(\frac{dB(t, T + \theta)}{B(t, T + \theta)}, \frac{dB(t, T)}{B(t, T)}\right) = \Gamma(t, T) \cdot \Gamma(t, T + \theta) dt.$$

3.1 Équation structurelle des taux

Proposition (prix des zéro-coupons). Le prix en t d'un zéro-coupon d'échéance T est donné par :

$$B(t, T) = B(0, T) \exp \left[\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, T)|^2 ds \right].$$

L'élimination du taux court conduit à :

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[\int_0^t [\Gamma(s, T) - \Gamma(s, t)] dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t [|\Gamma(s, T)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2] ds \right].$$

Remarques.

- Première égalité : utilise r_t , volatilité locale d'échéance T et $B(0, T)$.
- Seconde égalité : utilise la courbe des taux aujourd'hui et la structure des volatilités locales.

Théorème (Equations intégrales des taux). La dynamique des **taux courts forwards** est donnée par :

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t \gamma(s, T) dW_s + \int_0^t \gamma(s, T) \Gamma(s, T)^\top ds.$$

Représentation du **taux court** :

$$r_t = f(0, t) - \int_0^t \gamma(s, t) dW_s + \int_0^t \gamma(s, t) \Gamma(s, t)^\top ds,$$

$$f(t, T) = r_T + \int_t^T \gamma(s, T) dW_s - \int_t^T \gamma(s, T) \Gamma(s, T)^\top ds.$$

Remarque. Ces équations ne constituent pas un modèle, mais résultent naturellement de l'AOA. Obtenues pour la première fois par *Heath-Jarrow-Morton* en 1987.

MODELE = Choix d'une volatilité sous la forme $\gamma(s, t) = \sigma(s, f(s, t))$ comme pour [Hull et White '90, Jamshidian '90, El Karoui-Geman '92, El Karoui-Myneni-Viswanathan '92, Musiela '93...]

3.2 Quelques propriétés probabilistes

Théorème. Le taux forward $(f(t, T) : 0 \leq t \leq T)$ est martingale sous la probabilité forward-neutre $\mathbb{Q}^T$.

Théorème. Le prix forward en t de r_T en T est le taux forward $f(t, T)$:

$$f(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} [r_T \mid \mathcal{F}_t].$$

3.3 Exemple : modèle de Hull et White 1 facteur '90

$n = 1$ source d'incertitude = 1 brownien. Volatilité $\gamma(t, T) = \sigma e^{-a(T-t)}$ (même volatilité que le modèle de Vasicek) et $\Gamma(t, T) = \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$.

Taux court. $r_t = f(0, t) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$.

Sous forme différentielle :

$$dr_t = [\partial_t f(0, t) + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) - ar_t]dt - \sigma dW_t.$$

➡ Modèle de Vasicek généralisé avec coefficients déterministes du temps.

Taux continu.

$$\theta R(t, \theta) = \theta R_0(t, \theta) + \frac{1 - e^{-a\theta}}{a}(r_t - f(0, t)) + \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-2a\theta})(1 - e^{-a\theta})^2.$$

Prix de zéro-coupon.

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left(-\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}(r_t - f(0, t)) \right) \exp \left(-\frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-2a(T-t)})(1 - e^{-a(T-t)})^2 \right).$$

3.4 Call dans un modèle de HW 1 facteur

Proposition. Considérons un actif à volatilité déterministe $(\sigma(t))_t$ (sans dividende), avec des taux suivant un modèle de Hull-White 1 facteur.

Le prix de Call de strike K et d'échéance T est égal à l'instant t à :

$$\text{Call}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] = S_t \mathcal{N}(d_+(t)) - K B(t, T) \mathcal{N}(d_+(t)),$$

$$\text{avec } d_{\pm}(t) = \frac{1}{\Sigma_{t,T} \sqrt{T-t}} \text{Log}\left(\frac{S_t}{K B(t, T)}\right) \pm \frac{1}{2} \Sigma_{t,T} \sqrt{T-t},$$

$$\Sigma_{t,T}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\sigma(u) - \Gamma_V^a(u, T))^2 du.$$

Une couverture de l'option consiste à l'instant t en l'achat de $\mathcal{N}(d_+(t))$ actifs et la vente de $K \mathcal{N}(d_-(t))$ zéro-coupon d'échéance T .

Corollaire (Call sur zéro-coupon). Prendre $S_t = B(t, T + \theta)$ de volatilité déterministe $\sigma(t) = \Gamma_V^a(t, T + \theta) = \sigma \frac{1 - e^{-a(T+\theta-t)}}{a}$.

Extensions multi-facteurs

Nécessité d'incorporer plusieurs facteurs (associés à des browniens supplémentaires). En effet, lorsqu'une ACP est faite sur les rendements des différents zéro-coupon, plusieurs composantes (facteurs) sont détectées (en général 3 ou 4).

1. facteur de niveau, déplacements parallèles de la courbe des taux (60% des variations de la courbe des taux) (rendu compte par Vasicek 1 facteur) ;
2. facteur de pivotement (ou pente ou rotation) (explique de 5 à 25% des variations de la courbe des taux) ;
3. facteur de courbure, explique la concavité de la courbe au milieu (explique de 0 à 10% des variations de la courbe des taux).

4 Quelques produits de taux d'intérêt

4.1 Caps, floors et collars

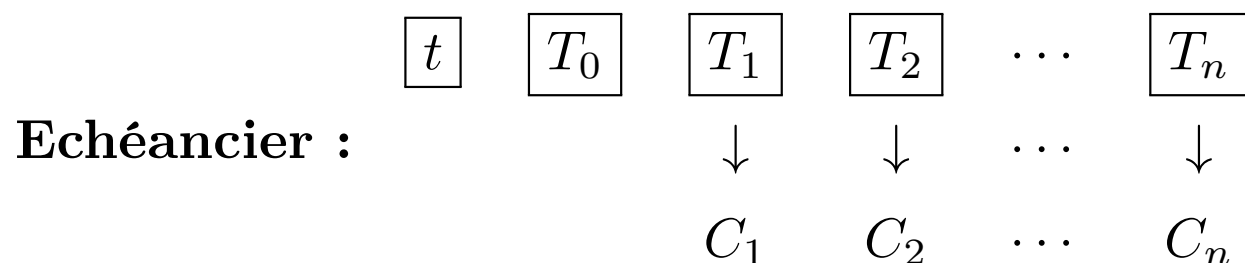
- Cap = assurance contre la hausse du taux de référence au dessus du taux d'exercice du cap, à certaines dates dans le futur.
- Floor = assurance contre la baisse ...
- Collar emprunteur = Cap - Floor de même caractéristiques.
- Collar prêteur = Floor - Cap de même caractéristiques.

Exemple de taux de référence sous-jacent : taux Libor de maturité $\delta = 3M$. Noté $L(t, \delta)$ à l'instant t et défini par

$$B(t, t + \delta) = \frac{1}{1 + \delta L(t, \delta)} \Leftrightarrow \delta L(t, \delta) = \frac{1}{B(t, t + \delta)} - 1.$$

(taux linéaire remplaçant $R(t, \delta)$ pour les courtes maturités).

Exemple (floor avec nominal 1 €, de taux d'exercice E).



A chaque date T_j , le détenteur du floor touche

$$C_j = \delta(E - L(T_{j-1}, \delta))_+.$$

Notons $Floorlet_t^j$ le prix en t du flux C_j en T_j : alors $Floor_t = \sum_j Floorlet_t^j$.

Pour le Floorlet j , équivalent à toucher en T_{j-1} le flux $C_j B(T_{j-1}, T_j)$, soit encore

$$(1 + \delta E) \left(B(T_{j-1}, T_j) - \frac{1}{1 + \delta E} \right)_+,$$

c'est-à-dire $(1 + \delta E)$ le payoff d'un call d'échéance T_{j-1} sur le zéro-coupon d'échéance T_j et de strike $\frac{1}{1 + \delta E}$.

➡ Prix en t explicite si la volatilité de $B_t(T_{j-1}, T_j)$ est déterministe.

Proposition

1. $Floor_t = (1 + \delta E) \times$ somme de $Call_t$ d'échéance T_{j-1} sur le zéro-coupon d'échéance T_j et de strike $\frac{1}{1+\delta E}$.
2. $Cap_t = (1 + \delta E) \times$ somme de Put_t d'échéance T_{j-1} sur le zéro-coupon d'échéance T_j et de strike $\frac{1}{1+\delta E}$.

Collar emprunteur

Pour le Collar emprunteur, le Collarlet^j équivaut au flux en T_{j-1}

$$\begin{aligned} & (1 + \delta E) \left(B(T_{j-1}, T_j) - \frac{1}{1 + \delta E} \right)_+ - (1 + \delta E) \left(\frac{1}{1 + \delta E} - B(T_{j-1}, T_j) \right)_+ \\ & = 1 - (1 + \delta E) B(T_{j-1}, T_j). \end{aligned}$$

Par AOA (sans modèle), on a donc

$$Collar_t^j = B(t, T_{j-1}) - (1 + \delta E) B(t, T_j).$$

4.2 Swap

Définition. Echange entre des flux d'intérêt annuels ou pluri-annuels constatés à des dates préfixées, et un taux fixe appelé taux de swap T_{Swap} .

t	T_0	T_1	$\dots$	T_n
		$\downarrow$	$\dots$	$\downarrow$
Echéancier pour achat de Swap :		$T_{\text{Swap}}\delta$	$\dots$	$T_{\text{Swap}}\delta$
		$-L(T_0, \delta)\delta$	$\dots$	$-L(T_{n-1}, \delta)\delta$

1. Le prix en t de la branche variable est $-\sum_{i=1}^n B(t, T_i)F_t(L(T_{i-1}, \delta), T_i)\delta$.
2. Le prix en t de la branche fixe est $\sum_{i=1}^n B(t, T_i)T_{\text{Swap}}\delta$.

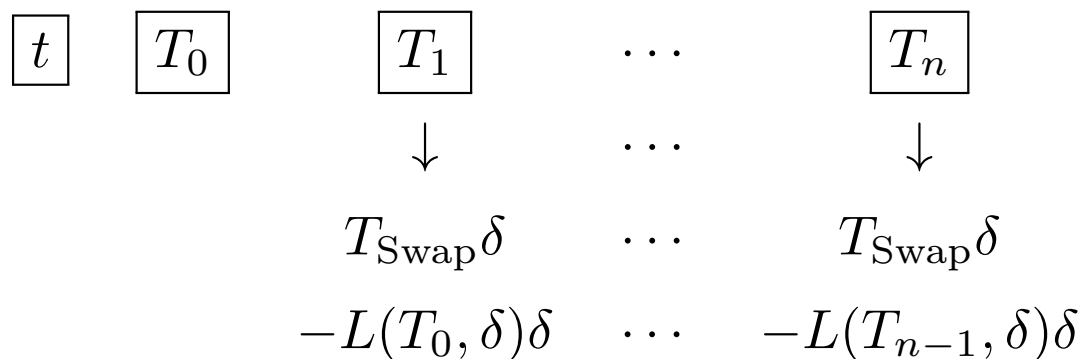
On a la relation $F_t(L(T_{i-1}, \delta), T_i) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1 \right) \Rightarrow$

$$\text{Swap}_t = \sum_{i=1}^n B(t, T_i)T_{\text{Swap}}\delta + B(t, T_n) - B(t, T_0).$$

Taux de Swap : $T_{\text{Swap}}(t)$ calculé de sorte que $\text{Swap}_t = 0 \Rightarrow$

$$T_{\text{Swap}}(t) = \frac{1}{\delta} \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n B(t, T_i)}.$$

Définition (swaption). Droit de rentrer dans un swap à T_0 au taux swap $T_{\text{Swap}} = k$.



Payoff en $T_0 = (\text{Swap}_{T_0} - k)_+ = (\sum_{i=1}^n B(T, T_i)T_{\text{Swap}}\delta + B(T, T_n) - 1 - k)_+.$

Poursuivre sur le polycopié de Nicole El Karoui.